



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

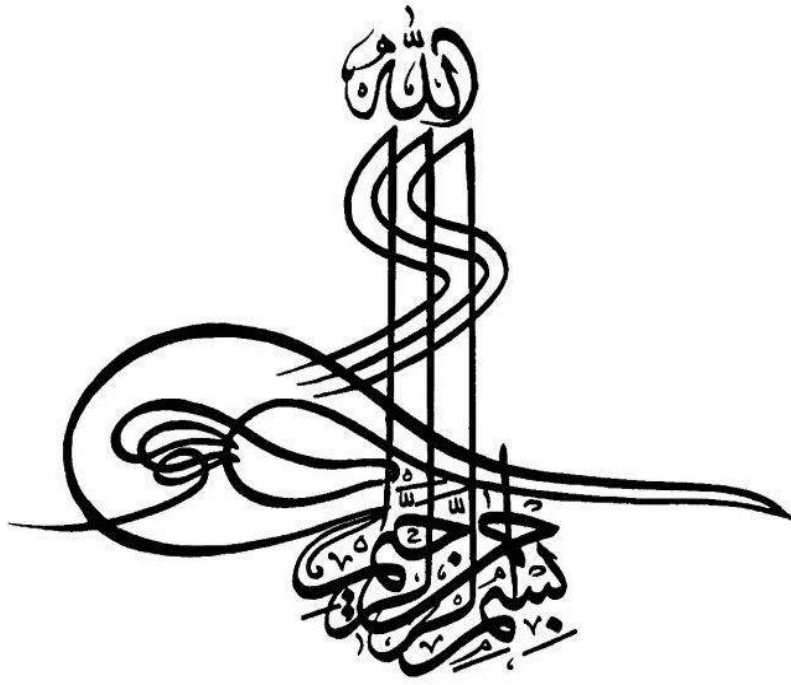
و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:


<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)



تابع

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی 

تمرین های برای آمادگی 

مؤلف:

حبيب هاشمی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۳۹۵

جهت تهیه جزوه کامل تابع (فصل دوم وسوم ریاضی ۲؛ فصل دوم ریاضی ۳ و فصل دوم ریاضی عمومی پیش دانشگاهی) تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

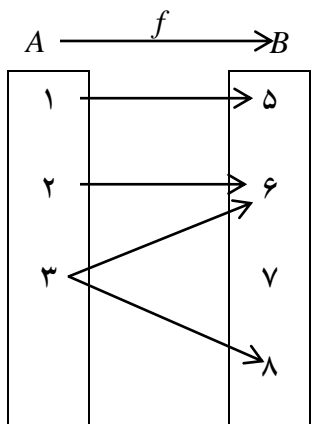
مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث «تابع» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
- ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
- ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
- ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
- ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
- ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
- ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
- ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب. در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبيب هاشمی

مفهوم تابع: یعنی تبعیت کردن چیزی از چیزی یا کسی از کسی.



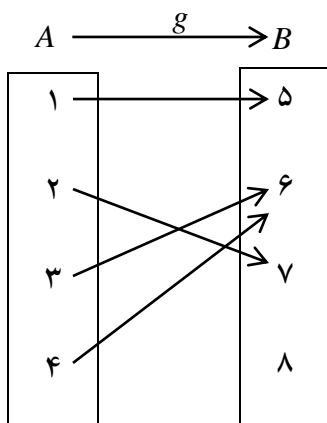
مجموعه ابتدا (آغاز) مجموعه پایان
 (X خانم ها) (y آقایان)
 دامنه هم دامنه

$$f = \{(1,5), (2,6), (3,6), (3,8)\}$$

اگر در مجموعه‌ی آغاز x ای پیدا شود که با

بیش از یک y در ارتباط باشد تابع نیست

(y از x تبعیت نمی کند) (مرد تابع زن است)



مردهای متأهل = برد تمام خانم‌ها = دامنه

خانم‌ها نباید مجرد بمانند اما آقایان اشکالی ندارد. چون خانم‌ها آقایان را

انتخاب می کنند ممکن است خانم‌ها از یک آقا خوششان نیاید.

$$g = \{(1,5), (2,7), (3,6), (4,6)\}$$

تشخیص تابع از روی نمودار ون: از هر کدام از عضوهای مجموعه اول فقط یک فلش خارج شود (نه

یک فلش کمتر و نه یک فلش بیشتر)

مقدار تابع از روی نمودار ون = مردها

بالاتر

$$f(1) = 5$$

$$f(3) = 6$$

$$f(2) = 7$$

$$f(4) = 6$$

تشخیص تابع از روی زوج مرتب:

یک تابع f از مجموعه A به مجموعه B را می‌توانیم با مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها نشان بدهیم که مؤلفه اول هر زوج مرتب عضوی از A و مؤلفه دوم هر زوج عضوی از B باشد این زوج مرتب‌ها باید دو ویژگی داشته باشد

(۱) برای هر $x \in A$ زوج مرتبی با مؤلفه اول x در f وجود داشته باشد (یعنی از مجموعه اول حتماً فلشی خارج شود)

(۲) در f هیچ دو زوج مرتبی متمایزی با مؤلفه اول یکسان وجود نداشته باشد (یعنی از مجموعه اول فقط یک فلش خارج شود)

تذکر: اگر مؤلفه‌های اول با هم برابر باشند در صورتی تابع است که مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند

نسبت دادن A به B را با نماد $y = f(x)$ نیز می‌توانیم نشان دهیم به این معنی که $(x, y) \in f$ آنگاه $y = f(x)$ و بالعکس.

مثال: $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7\}$ آن گاه کدام گزینه تابعی از A به B را نشان نمی‌دهد؟

$$f = \{(1, 3), (1, 5), (3, 1)\} \quad (2) \qquad f = \{(1, 3), (3, 5), (2, 7)\} \quad (1)$$

$$f = \{(1, 5), (2, 1), (3, 7)\} \quad (4) \qquad f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \quad (3)$$

جواب: گزینه ۲ چون دو زوج مرتب $(1, 3)$ و $(1, 5)$ دارای مختص اول برابرند اما مختص دوم برابر نیستند.

مثال: اگر $A = \{7, 8, 9\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ آن گاه کدامیک از روابط زیر تابعی از A به B را نشان می‌دهد

$$f_1 = \{(7, 3), (8, 5), (9, 1)\} \qquad f_2, f_1 \quad (2) \qquad f_1 \quad (1)$$

$$f_2 = \{(7, 5), (8, 3)\} \qquad f_4, f_1 \quad (4) \qquad f_3, f_2, f_1 \quad (3)$$

$$f_3 = \{(7, 3), (8, 5), (8, 1)\}$$

$$f_4 = \{(7, 1), (8, 5), (9, 4)\}$$

f_2 : برای هر $x \in A$ زوج مرتبی با مؤلفه اول x در f وجود داشته باشد (یعنی از مجموعه اول حتماً فلشی خارج شود)

چون $9 \in A$ ولی زوج مرتبی با مؤلفه اول ۹ در f وجود ندارد پس تابع نیست.

f_3 : دارای مختص اول برابر هستند پس تابع نیست.

f_4 : چون برد آن $\{1, 5, 4\}$ است در صورتی که باید از $\{1, 3, 5\}$ تشکیل شده باشد.

مثال: به ازای کدام مقدار b رابطه ی $R = \{(1, 3), (2, 4), (b, 3), (4, 3)\}$ تابع است؟

$$1 \quad (1) \quad R \quad (2) \quad R \quad (3) \quad R - \{2\} \quad (4) \quad R - \{2, 4\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{تابع است} \rightarrow R = \{(1, 3), (2, 4), (1, 3), (4, 3)\} \rightarrow \text{if } b = 1 \\ \text{تابع نیست} \rightarrow R = \{(1, 3), (2, 4), (2, 3), (4, 3)\} \rightarrow \text{if } b = 2 \\ \text{تابع است} \rightarrow R = \{(1, 3), (2, 4), (4, 3), (4, 3)\} \rightarrow \text{if } b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow b \neq 2$$

مثال: به ازای کدام مقدار m رابطه ی $R = \{(1, 5), (-2, 4), (4, 7), (-2, m^2 - 3m), (m + 5, 9)\}$ تابع است؟

$$1 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -4 \quad (1)$$

$$(-2, 4), (-2, m^2 - 3m) \Rightarrow m^2 - 3m = 4 \rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} m = 4 \\ m = -1 \end{array}$$

$$\text{if } m = 4 \Rightarrow R = \{(1, 5), (-2, 4), (4, 7), (-2, 4), (9, 9)\} \rightarrow$$

$$\text{if } m = -1 \Rightarrow R = \{(1, 5), (-2, 4), (4, 7), (-2, 4), (4, 9)\} \rightarrow \times$$

تمرین: رابطه ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع

است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

$$m \quad (4) \quad \text{هیچ مقدار} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad -1 \quad (1) \quad -2$$

تمرین: اگر $f = \{(1, 2), (m, 3), (1, m^2 + 1)\}$ به ازای چه مقدار m ، f یک تابع خواهد بود؟ (سراسری تجربی) (۸۵)

$$m \in R \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

مثال: اگر $g = \{(4, -1), (-1, 4), (a^2 + 3a, -1), (-2, a)\}$ یک تابع باشد آن گاه a چند مقدار حقیقی نمی تواند اختیار کند؟

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

حل) چون g تابع است، پس $a^2 + 3a$ با هیچ یک از مؤلفه های اول سائیز زوج ها نباید برابر باشد پس

$$a^2 + 3a \neq -1 \Rightarrow a^2 + 3a + 1 \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{جواب } \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} a &= -4 \text{ جایگذاری} \\ a^2 + 3a \neq 4 &\Rightarrow \\ a &= 1 \text{ جایگذاری} \end{aligned}$$

$$a^2 + 3a \neq -2 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow g = \left\{ (4, -1), (-1, 4), \overbrace{(-2, -1), (-2, -1)}^{\text{مؤلفه های اول و دوم برابرند}} \right\} \text{ تابع است}$$

$$a = -2 \Rightarrow g = \left\{ (4, -1), (-1, 4), \underline{(-2, -1)}, \underline{(-2, -2)} \right\} \text{ تابع نیست}$$

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

مقدار تابع از روی زوج مرتب:

مثال: اگر $f = \{(2,4), (3,1), (4,-6)\}$ باشد حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $f(2) = 4$ ب) $f(4) = -6$ ج) $f(3) = 1$

مثال: اگر توابع f و g به صورت زیر باشند حاصل $g(f(1))$ کدام است؟

۱ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) تعریف نشده

$$f = \{(1,2), (2,3), (5,6)\}$$

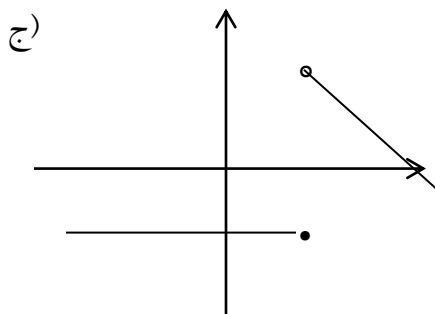
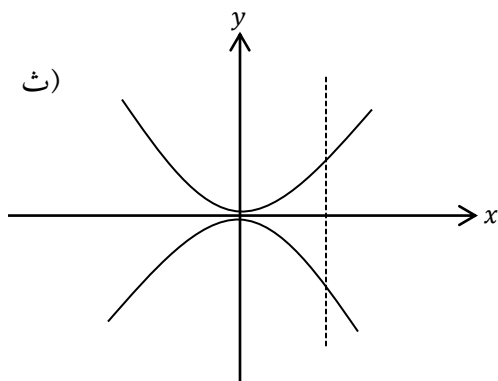
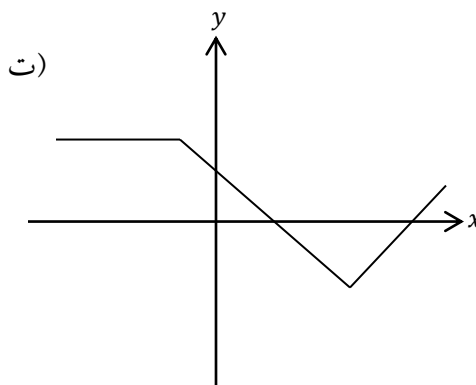
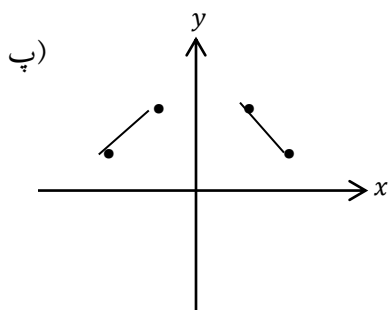
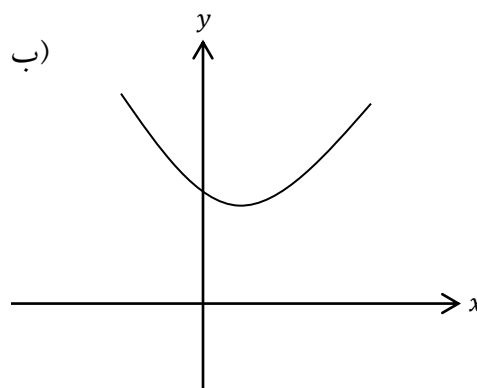
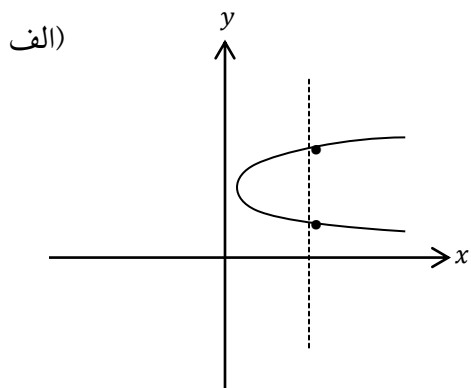
$$\begin{cases} g(f(1)) = g(2) = 4 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

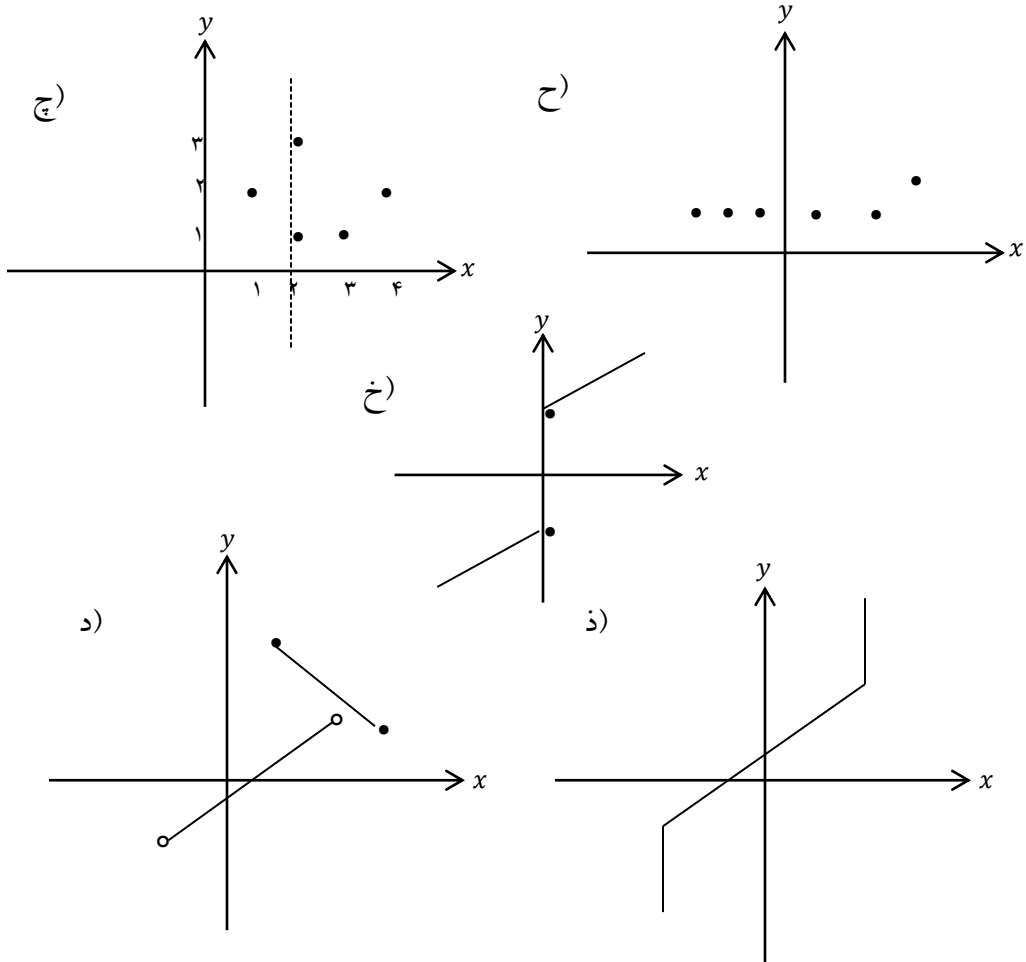
$$g = \{(3,5), (2,4), (1,5)\}$$

تشخیص تابع از روی نمودار :

اگر هر خط قائم رسم کنیم و نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند تابع نیست (یعنی یا باید قطع نکند یا اگر قطع کرد در یک نقطه قطع کند تا تابع شود)

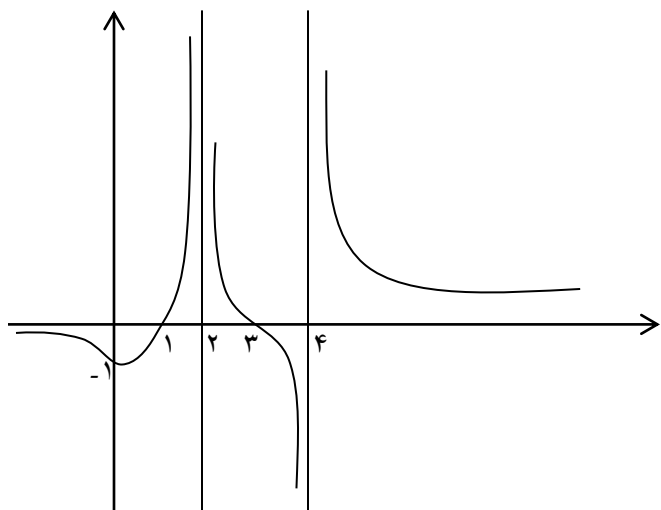
مثال : کدامیک از اشکال زیر یک تابع است؟





مقدار تابع از روی نمودار :

مثال : با توجه به نمودار حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



الف) $f(0) = -1$

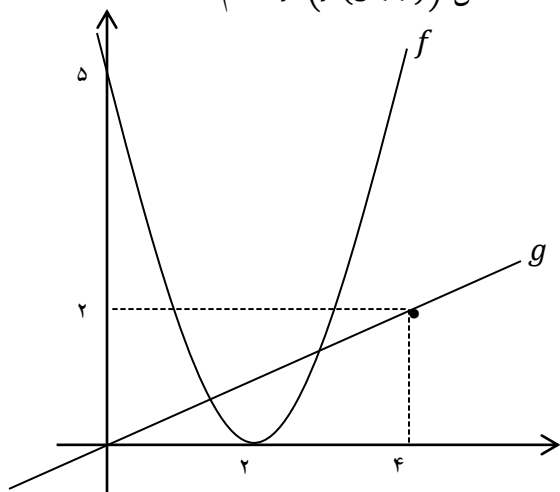
ب) $f(1) = 0$

پ) $f(2) =$ تعریف نشده

ت) $f(3) = 0$

ث) $f(4) =$ تعریف نشده

مثال : در شکل مقابل نمودار توابع f و g رسم شده است حاصل $f(f(g(4)))$ کدام است؟



۱ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

$$f(f(g(4))) = f(f(2)) = f(0) = 5$$

$$g(4) = 2$$

$$f(2) = 0$$

تابع از نظر ضابطه:

معمولاً ضابطه ی تابعی مانند f را به شکل $y = f(x)$ بیان می کنیم این ضابطه نشان می دهد که تابع f روی ورودی x عمل می کند و خروجی y را تحویل می دهد.

تشخیص تابع از روی ضابطه: معمولاً به x می دهیم اگر برای y بیشتر از یک مقدار بدست آمد ضابطه ی داده شده تابع نیست (معمولاً سه عدد $0, 1, -1$ را امتحان می کنیم اگر برای یکی از این سه عدد دو مقدار یا بیشتر برای y بدست آید تابع نیست).

تذکر: هر سه عدد $0, 1, -1$ را به جای x قرار می دهیم بایستی برای y یا جوابی نداشته باشیم یا اگر جواب داشتیم فقط یک جواب باشد در این صورت تابع است.

تذکر: اگر برای یکی از این سه عدد دو مقدار یا بیشتر برای y به دست آمد تابع نیست و نیازی به جایگذاری بقیه اعداد نداریم.

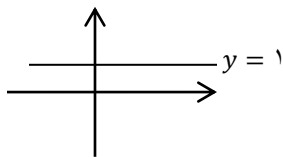
مثال: کدامیک از روابط زیر تابع است؟

۱) $|y| - x = 0 \xrightarrow{x=1} y = \pm 1 \quad \times$

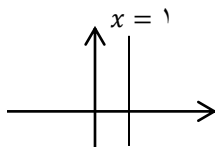
۲) $y^2 - x^2 = 0 \xrightarrow{x=1} y = \pm 1 \quad \times$

۳) $y^2 - x = 0 \xrightarrow{x=1} y = 1$
 $\xrightarrow{x=-1} y = -1$ $x = 0 \rightarrow y = 0$

۴) $y = 1$



۵) $x = 1$



$x = 1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

۶) $x^x + y^y = 0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = -1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

۷) $x^x + y^y = 1 \xrightarrow{x=0} y = \pm 1 \quad \times$

$x = 1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

۸) $x^x + y^y = -1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} x = 0 \rightarrow y =$ جواب ندارد

$x = -1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

(مجموع دو عبارت نامنفی همواره نامنفی است.) رابطه تھی تابع است.

۹) $|y - 1| + x = 0 \xrightarrow{x=-1} |y - 1| = 1 \rightarrow \begin{cases} y - 1 = 1 \rightarrow y = 2 \\ y - 1 = -1 \rightarrow y = 0 \end{cases} \quad \times$

۱۰) $y^x - 3y^x + x = 0 \xrightarrow{x=0} y = 0, \pm 3 \quad \times$

۱۱) $xy^x - x = 1 \xrightarrow{x=1} y = \pm\sqrt{2} \quad \times$

$x = 1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

۱۲) $|x| + |y| = 0 \xrightarrow{x=0} \xrightarrow{\quad\quad\quad} x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = -1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

$x = 1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

۱۳) $|x| + |y| = -2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} x = 0 \rightarrow y =$ جواب ندارد

$x = -1 \rightarrow y =$ جواب ندارد

(مجموع دو عبارت نامنفی همواره نامنفی است.) رابطه تھی تابع است.

۱۴) $y^x + 2y = x - 1 \xrightarrow{x=1} y = 0, -2 \quad \times$

۱۵) $|x| + |y - 1| = 1 \xrightarrow{x=0} y = 0, 2 \quad \times$

۱۶) $|y| + \sqrt{x} = 1 \xrightarrow{x=0} y = \pm 1$

مقدار تابع از روی ضابطه:

مثال: دو تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x} - 2$ و $g(x) = x + 1$ مفروض اند مقدار $f(g(3))$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\begin{cases} f(g(3)) = f(4) = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0 \\ g(3) = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) صفر (۳) یک (۴) $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}} \\ f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

$$\begin{cases} f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{12 + 24} = \sqrt{36} = 6 \\ f(-144) = \sqrt{-144 + 2|-144|} = \sqrt{-144 + 288} = \sqrt{144} = 12 \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ آن گاه $f(8)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۷ (۴) ۸

$$f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

توابع چند ضابطه ای:

در توابع چند ضابطه ای نباید دامنه ها اشتراک داشته باشند مگر آنکه به ازای اعضای مشترک دامنه، مقدار ضابطه ها با هم برابر باشد.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 5 \\ 2x + a & x \geq 5 \end{cases}$ یک تابع باشد آن گاه مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۳۴ (۴) ۴

$$x^2 - 1 = 2x + a \xrightarrow{x=5} 5^2 - 1 = 2(5) + a \Rightarrow a = 14$$

مثال: مقدار a چه باید باشد تا رابطه $f(x) = \begin{cases} 2x + \cos(\pi x) & x \geq 1 \\ 2a + 14x & x \leq 1 \end{cases}$ تابع شود؟

- (۱) ۱۳ (۲) -۱۳ (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) $-\frac{13}{2}$

$$\begin{aligned} 2x + \cos \pi x &= 2a + 14x \xrightarrow{x=1} \\ 2(1) + \cos \pi(1) &= 2a + 14(1) \\ \Rightarrow 2 + (-1) &= 2a + 14 \rightarrow 1 = 2a + 14 \rightarrow a = \frac{-13}{2} \end{aligned}$$

مقدار توابع چند ضابطه ای:

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$ آن گاه حاصل $f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

$$\begin{cases} f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

مثال ۱۰۸: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟
(سراسری تجربی ۹۰)

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

$$\begin{cases} f(f(5)) = f(2) = 2(2) + 3 = 7 \\ f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} f(f(1)) = f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2 \\ f(1) = 2(1) + 3 = 5 \end{cases}$$

مثال: در تابع ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2} & , x < 1 \\ 2x - \sqrt{2} & , x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f(3 - \sqrt{2}) + f(3 - 2\sqrt{2})$ کددام است؟

(۱) ۲ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $-6\sqrt{2}$ (۴) $2 - 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} f(3 - \sqrt{2}) = 2(3 - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 6 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 6 - 3\sqrt{2} & \text{I} \\ f(3 - 2\sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 4 & \text{II} \end{cases} \quad \text{I, II} = 6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 2$$

مثال: $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases}$ آن گاه حاصل

$g(f(\tan 200^\circ + \cot 200^\circ))$ کددام است؟

(۱) ۰ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۴

$$\begin{cases} \underbrace{\tan 200^\circ}_{\text{ناحیه سوم}} + \underbrace{\cot 200^\circ}_{\text{ناحیه سوم}} > 0 \rightarrow f(\tan 200^\circ + \cot 200^\circ) = 2 \\ g(2) = 2 \end{cases}$$

پیدا کردن ضابطه تابع از روی معادله ی تابعی:

شکل اصلی معادله تابع همیشه به صورت $f(x) = \text{عبارت}$ است اگر معادله تابع به صورت $f(g(x)) = \text{عبارت}$ باشد معمول ترین روش نوشتن تابع به صورت شکل اصلی استفاده از تغییر متغیر است به این صورت که قرار می دهیم $g(x) = t$ و عبارت را بر حسب t به دست می آوریم به این ترتیب $f(t)$ یا همان شکل اصلی تابع بدست آمده است.

مثال: اگر برای هر $x \in R$ داشته باشیم $f(x+5) = x^2 + 10x$ آن گاه حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)$ ب) $f(6)$ ج) $f(x-3)$ د) $f(\sqrt{x})$

$$\text{حل) } x+5=t \Rightarrow x=t-5 \Rightarrow f(t-5+5) = (t-5)^2 + 10(t-5)$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 10t + 25 + 10t - 50 \rightarrow f(t) = t^2 - 25$$

$$\text{الف) } f(x) = x^2 - 25$$

$$\text{ب) } f(6) = 6^2 - 25 = 36 - 25 = 11$$

$$\text{ج) } f(x-3) = (x-3)^2 - 25 = x^2 - 6x + 9 - 25 = x^2 - 6x - 16$$

$$\text{د) } f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 25 = |x| - 25$$

مثال: اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+x^2}$ آن گاه ضابطه ی $f(x)$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۴) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \quad (۳) \quad f(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad (۲) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{x} = t \rightarrow x = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

مثال: اگر برای هر $x \neq 0, 1$ داشته باشیم $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ آن گاه $f(x+1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{x+1}{x}$ (۲) $\frac{x}{x+1}$ (۳) $\frac{x}{x-1}$ (۴) $\frac{x-1}{x}$

$$\frac{x}{x-1} = t \Rightarrow tx - t = x \Rightarrow tx - x = t \Rightarrow x(t-1) = t$$

$$\Rightarrow x = \frac{t}{t-1} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\frac{t}{t-1}} = \frac{t-1}{t}$$

$$\Rightarrow f(x+1) = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

تمرین: اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ آن گاه $f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

(۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

مثال: اگر برای هر $x \geq 0$ داشته باشیم $f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}$ آن گاه $f(2) + f(1)$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

$$\sqrt{x} = t \xrightarrow{(\quad)^2} x = t^2 \Rightarrow f(t) = t^2 + \sqrt{t^2} = t^2 + |t| = t^2 + t$$

$$f(1) = 1^2 + 1$$

$$f(2) = 2^2 + 2$$

$$\text{روش دوم: } \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(\sqrt{4}) = 4 + \sqrt{4} = 6$$

$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(\sqrt{1}) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

چند مثال ویژه صددرصدی ها

مثال : اگر برای هر $x > 1$ داشته باشیم $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ مقدار $f(3)$ کدام است؟

$$\frac{28}{3} \quad (1) \quad \frac{82}{9} \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad \frac{3}{28} \quad (4)$$

هر کاری کنیم x تنها نمی شود. با توجه به سؤال طرفین را به توان ۲ می رسانیم.

$$x + \frac{1}{x} = t \xrightarrow{(\quad)^2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(t) = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow f(3) = 3^2 - 2 = 7$$

مثال : اگر برای هر $x > 0$ داشته باشیم $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ در این صورت $f(x)$ کدام است؟

$$x - \frac{1}{x} = t \xrightarrow{(\quad)^2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \rightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(t) = (t^2 + 2) - 4 \rightarrow f(t) = t^2 - 2$$

مثال : اگر برای هر $x > 0$ داشته باشیم $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ در این صورت ضابطه ی

$f(x)$ کدام است؟

$$f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \rightarrow \text{قبلی مثال}$$

مثال : اگر برای هر $x \geq -\frac{1}{3}$ داشته باشیم $f(x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ آن گاه حاصل $f(\sqrt{3})$ چقدر است؟

$$x^2 + x = t \xrightarrow{(\quad)^2} (x^2 + x)^2 = t^2 \rightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 = t^2 \Rightarrow f(t) = t^2 \rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

اعمال جبری روی توابع:

مثال: اگر $f = \{(-۲, -۷), (-۱, ۰), (۰, -۱), (۲, ۵)\}$ و $g = \{(-۱, ۱), (۰, ۳), (۱, ۵), (۲, ۷)\}$ آن گاه حاصل

عبارت های زیر را بدست آورید؟

الف) $f(۰) = -۱$

ب) $g(۰) = ۳$

پ) $(f + g)(۰) = f(۰) + g(۰) = -۱ + ۳ = ۲$

ت) $f(-۱) = ۰$

ث) $g(-۱) = ۱$

ج) $(f \times g)(-۱) = f(-۱) \times g(-۱) = ۰ \times ۱ = ۰$

چ) $\left(\frac{f}{g}\right)(-۱) = \frac{f(-۱)}{g(-۱)} = \frac{۰}{۱} = ۰$

ح) $\left(\frac{g}{f}\right)(-۱) = \frac{۱}{۰}$ = تعریف نشده

خ) $(f + g)(۲) = f(۲) + g(۲) = ۵ + ۷ = ۱۲$

د) $(f - g)(۲) = f(۲) - g(۲) = ۵ - ۷ = -۲$

ذ) $\frac{۳f(-۲)}{(۲f-g)(۰)} = \frac{۳ \times -۷}{۲ \times -۱ - ۳} = \frac{-۲۱}{-۶} = \frac{۷}{۲}$

ر) $(۳f - ۲g)(۰) = ۳f(۰) - ۲g(۰) = ۳ \times -۱ - ۲ \times ۳ = -۳ - ۶ = -۹$

ز) $f(۲) = -۷$

ژ) $g(-۲) =$ تعریف نشده

س) $(f + g)(-۲) = f(-۲) + g(-۲) =$ تعریف نشده

ش) $(f \times g)(۱) =$ تعریف نشده

نتیجه ۱: وقتی تابع را به صورت زوج مرتب می نویسیم در صورتی می توانیم اعمال جبری را انجام دهیم که مؤلفه ی اول (دامنه ی) یکسان داشته باشند .

نتیجه ۲: اعمال جبری روی توابع بر روی خروجی اثر می گذارند.

$$\left(\frac{f+g}{x}\right)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$D_{\frac{f+g}{x}} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

با توجه به مثال بالا مطلوب است

الف) $D_{f+g} = \{-2, -1, 0, 2\} \cap \{-1, 0, 1, 2\} = \{-1, 0, 2\}$

ب) $D_{\frac{g}{f}} = \{D_f \cap D_g\} = \{x \mid f(x) = 0\} = \{-1, 0, 2\} - \{-1\} = \{0, 2\}$ چون $f(-1) = 0$

مثال: اگر f, g به صورت زیر باشند آن گاه $2f + g$ کدام است؟

$$f = \{(1, 5), (2, 3), (4, 7)\}$$

$$g = \{(1, 0), (3, 7), (2, 5), (6, 5)\}$$

$$\{(1, 10)\} \quad (1) \quad \{(2, 5), (4, 8)\} \quad (2) \quad \{(1, 5), (2, 8)\} \quad (3) \quad \{(1, 10), (2, 11)\} \quad (4)$$

$$D_f \cap D_g = \{1, 2\}$$

$$(2f + g)(1) = 10, (2f + g)(2) = 11 \rightarrow 2f + g = \{(1, 10), (2, 11)\}$$

مثال: اگر $f = \{(-2, 1), (5, 2), (7, 0), (4, 3)\}$ آن گاه $\frac{1}{f}$ کدام است؟

در f^{-1} جای x, y عوض می شود در $\frac{1}{f}$ ، x ثابت ولی y معکوس می شود دقت شود $\frac{1}{f} \neq f^{-1}$

$$\frac{1}{f} = \left\{ \left(-2, \frac{1}{1}\right), \left(5, \frac{1}{2}\right), \left(7, \frac{1}{0}\right), \left(4, \frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \frac{1}{1}, \left(\frac{1}{f}\right)(5) = \frac{1}{f(5)} = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ آن گاه مقدار عبارت های زیر را حساب کنید؟

الف) $\frac{(2f-g)(2)}{f(0)} = \frac{2f(2)-g(2)}{f(0)} = \frac{2 \times 2 - 4}{1} = 0$

ب) $\frac{(f \cdot g)(3) - 2f^2(8)}{f(-1)+2} = \frac{f(3) \cdot g(3) - 2f^2(8)}{f(-1)+2} = \frac{2 \times 4 - 3 \times 3^2}{0+2} = \frac{8-27}{2} = \frac{-19}{2}$

مثال: اگر $f = \left\{(-1, 2), (1, 4), \left(4, \frac{2}{5}\right)\right\}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ مطلوب است

$$D_f = \{-1, 1, 4\} \quad D_g = R - \{-1\} \Rightarrow D_{\begin{matrix} f+g \\ \times \end{matrix}} = \{+1, 4\}$$

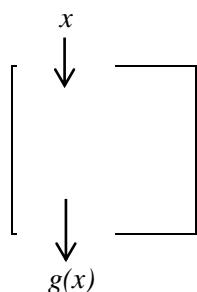
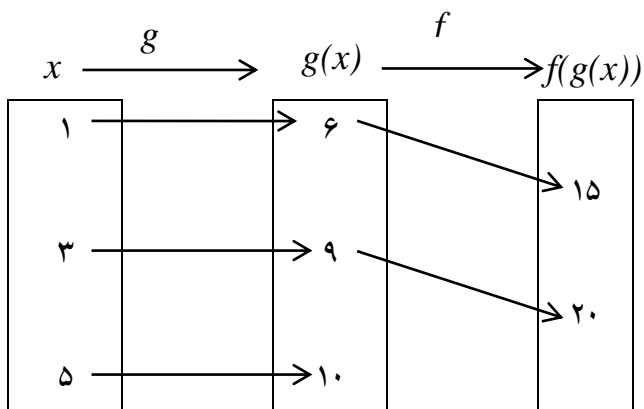
الف) $f + g = \begin{cases} (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 2 + 2 = 4 \text{ تعریف نشده} \\ (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 4 + 0 = 4 \rightarrow (1, 4) \\ (f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1 \rightarrow (4, 1) \\ \Rightarrow f+g = \{(1, 4), (4, 1)\} \end{cases}$

ب) $f - g = \{(1, 4), (4, -\frac{1}{5})\}$

ج) $f \times g = \{(1, 0), (4, \frac{6}{5})\}$

د) $\frac{f}{g} = \left\{\left(4, \frac{5}{2}\right)\right\}$

ترکیب توابع:

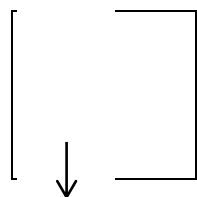


$$f(g(1)) = f(6) = 15 \Rightarrow (1, 15) \in fog$$

$$f(g(3)) = f(9) = 20 \Rightarrow (3, 20) \in fog$$

$$f(g(5)) = f(10) \times$$

$$\Rightarrow fog = \{(1, 15), (3, 20)\}$$



$f(g(x)) = (fog)(x)$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 2), (4, 6)\}$ و $g = \{(1, 3), (3, 1), (6, -1), (7, 1)\}$ و $(fog)(3) - (gof)(4)$ کدام است؟

کدام است؟

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)

$$(fog)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2 \rightarrow 2 - (-1) = 3$$

$$(gof)(4) = g(f(4)) = g(6) = -1$$

مثال: اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$ و fog گاه کدام است؟

- $\{(4, 5), (5, 6)\}$ (۴)
- $\{(2, 6), (4, 6)\}$ (۳)
- $\{(2, 3), (3, 4)\}$ (۲)
- $\{(2, 4), (3, 5)\}$ (۱)

$$(fog)(2) = f(g(2)) = f(3) = 4 \rightarrow (2, 4)$$

$$(fog)(3) = f(g(3)) = f(4) = 5 \rightarrow (3, 5)$$

$$(fog)(5) = f(g(5)) = f(6) = \text{تعريف نشده}$$

دقت کنیم برای انتخاب ورودی ها از ورودی های عبارتی که در سمت راست قرار دارد استفاده می کنیم
مثلاً برای fog چون g در سمت راست قرار دارد پس ورودی های ما همان x های g هستند یا برای gof
از ورودی های f استفاده می کنیم همچنین برای $fogoh$ از ورودی های h

مثال: دو تابع $f = \{(1,2), (2,3), (4,5), (3,4)\}$ و $g = \{(2,1), (3,2), (5,4)\}$ مفروضند توابع زیر را بیابید.

الف) $gof = \{(2,2), (3,3), (5,5)\}$

ب) $fog = \{(2,2), (3,3), (5,5)\}$

پ) $fof = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}$

ت) $gog = \{(3,1)\}$

ث) $fogof = \{(1,2), (2,3), (4,5), (4,5)\}$

ت) $fogof = f(g(f(1))) = f(g(2)) = f(1) = 2 \rightarrow (1,2)$

$$\begin{cases} (fogof)(2) = f(g(f(2))) = f(g(3)) = f(2) = 3 \rightarrow (2,3) \\ (fogof)(4) = f(g(f(4))) = f(g(5)) = f(4) = 5 \rightarrow (4,5) \\ (fogof)(3) = f(g(f(3))) = f(g(4)) = f(\text{تعريف نشده}) \end{cases}$$

مثال: اگر $f = \{(-1,2), (0,b), (1,-2)\}$ و $g = \{(3,a), (4,1), (5,3)\}$ و $(3,2) \in fog$ و $(0,1) \in gof$ باشد
حاصل $a + b$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$(3,2) \in fog \Rightarrow f(g(3)) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(a) = 2 \\ f(-1) = 2 \end{cases} \rightarrow a = -1$$

$$(0,1) \in \text{gof} \Rightarrow g(f(0)) = 1 \Rightarrow \begin{cases} g(b) = 1 \\ g(4) = 1 \end{cases} \rightarrow b = 4$$

مثال : دو تابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروضند اگر

$(4,2) \in \text{fog}$ و $(4,1) \in \text{gof}$ باشند دو تایی (a,b) کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

(۳,۴) (۱) (۴,۳) (۲) (۴,۵) (۳) (۵,۴) (۴)

$$(4,2) \in \text{fog} \Rightarrow f(g(4)) = 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 4 \rightarrow f(g(a)) = 2 \rightarrow f(3) = 2 \\ b = 4 \rightarrow f(g(b)) = 2 \rightarrow f(1) = 2 \end{cases}$$

درست است

نادرست است

$$(4,1) \in \text{gof} \Rightarrow \begin{cases} g(f(4)) = 1 \\ g(5) = 1 \\ g(b) = 1 \end{cases} \rightarrow b = 5$$

مثال : اگر $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ و $g = \{(-3,2), (4,1)\}$ باشد fog کدام است؟

(۱) $\{(-3,5)\}$ (۲) $\{2,5\}$ (۳) $\{(4, \frac{7}{3})\}$ (۴) \emptyset

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(g(-3)) = f(2) = \frac{2+3}{2-1} = 5 \rightarrow (-3,5)$$

$$(\text{fog})(4) = f(g(4)) = f(1) = \frac{1+3}{1-1} = \text{ت ن}$$

مثال : اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ عدد a کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\begin{cases} g(f(a)) = 5 \\ g(?) = 5 \Rightarrow ? = 6 \end{cases} \Rightarrow f(a) = ? = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4$$

مثال: اگر $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ و $g(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ آن گاه حاصل $\frac{(f \circ g)(\cdot)}{(g \circ f)(-2)}$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{4} \quad (۴) \quad -\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{4} \quad (۳) \quad -\frac{2+\sqrt{5}}{8} \quad (۲) \quad \frac{2+\sqrt{5}}{8} \quad (۱)$$

$$(f \circ g)(\cdot) = f(g(\cdot)) = f(-1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}(-1)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(2)) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{5} - 2$$

$$\frac{(f \circ g)(\cdot)}{(g \circ f)(-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}-2} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{1}{2\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{2(5-4)} = \frac{\sqrt{5}+2}{2}$$

مثال: اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد آن گاه حاصل

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) \quad \text{؟ (سراسری تجربی ۸۹)}$$

$$4\sqrt{2} \quad (۴) \quad 4(1 - \sqrt{2}) \quad (۳) \quad \sqrt{2} - 1 \quad (۲) \quad 4 \quad (۱)$$

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) = f(g(1 - \sqrt{2})) = f(3 - 4\sqrt{2}) = |3 - 4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2} - 3$$

$$g(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 + 2(1 - \sqrt{2}) + 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$(g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = g(f(1 - \sqrt{2})) = g(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 + 2(1 - \sqrt{2}) + 1 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 - 1 = 2$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

$$f \circ g - g \circ f = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

* اگر $g(x) = (x+1)^2$ می نوشتیم مسئله راحت تر حل می شد.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & , x \geq 2 \\ \sin x - 2 & , 0 < x < 2 \\ \sqrt{1-15x} & , x \leq 0 \end{cases}$ آن گاه حاصل $(f \circ f \circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

$$1 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad -2 \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

$$(f \circ f \circ f) \left(\frac{\pi}{2} \right) = f \left(f \left(f \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = f(f(-1)) = f(4) = 2$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3/14}{2} \cong 1/57 \rightarrow \text{ضابطه دوم} \rightarrow f \left(\frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} - 2 = 1 - 2 = -1$$

مثال: اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ آن گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

$$\begin{cases} (f \circ g)(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f \left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right] = \left[\frac{1/4}{1-1/4} \right] = \left[\frac{1/4}{3/4} \right] = \left[-\frac{14}{4} \right] = [-3/5] = -4 \\ g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ باشد مطلوب است:

الف) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{9 - x^2}) = \sqrt{(\sqrt{9 - x^2})^2 - 4} = \sqrt{|9 - x^2| - 4}$

ب) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 4}) = \sqrt{9 - (\sqrt{x^2 - 4})^2} = \sqrt{9 - |x^2 - 4|}$

مثال: اگر $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = 2 - x$ و $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = 6$ آن گاه مقدار a کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 - x) = 3(2 - x) + a = 6 - 3x + a$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + a) = 2 - (3x + a) = 2 - 3x - a$$

$$\Rightarrow (6 - 3x + a) - (2 - 3x - a) = 6 \Rightarrow 6 - 3x + a - 2 + 3x + a = 6 \Rightarrow a = 1$$

مثال: اگر $f(x) = 2x + 2a$ و $g(x) = x^2 + bx + c$ و $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x + 1$ آن گاه حاصل

$a + b + c$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + bx + c) = 2(x^2 + bx + c) + 2a \\ &= 2x^2 + 2bx + 2c + 2a = 2x^2 + x + 1 \\ \begin{cases} 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \\ 2c + 2a = 1 \rightarrow a + c = \frac{1}{2} \end{cases} &\rightarrow a + b + c = 1\end{aligned}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{-x}{4}$ و $h(x) = 4x - 8$ آن گاه حاصل $(h \circ g \circ f)(x)$ کدام است؟

$\sqrt{x} - 2$ (۱) $\sqrt{2} - 8$ (۲) $2\sqrt{2} - 4$ (۳) $\sqrt{x} - 2$ (۴)

$$h(g(f(x))) = h(g(\sqrt{x})) = h\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right) - 8 = \sqrt{x} - 8$$

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g = (f + 2f) \circ f$ آن گاه ضابطه ی $g(x)$ کدام است؟

$6x - 6$ (۱) $6x - 9$ (۲) $12x - 9$ (۳) $12x - 6$ (۴)

$$g = (3f) \circ f = h \circ f = h(f(x)) = h(2x - 1) = 6(2x - 1) - 3 = 12x - 9$$

$$3f = h = 6x - 3$$

مثال: اگر $x \neq 1$ و $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ضابطه ی $(f \circ f)(x)$ کدام است؟

$-x$ (۱) x (۲) $\frac{x}{x+1}$ (۳) $\frac{x+1}{x}$ (۴)

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x - (x-1)}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \cot x$ باشد حاصل $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

$\tan^2 x$ (۱) $\cot^2 x$ (۲) $\sin^2 x$ (۳) $\cos^2 x$ (۴)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\cot x) = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{1} = \cos^2 x\end{aligned}$$

مثال: اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f, fog با کدام طول متقاطع اند؟

سراسری تجربی (۹۲)

$$\begin{matrix} (1) & -1 & (2) & \frac{1}{2} & (3) & 1 & (4) & \frac{3}{4} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (fog)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (2(x + 2) - 3)^2 = (2x + 1)^2 \\ f(x) = (2x - 3)^2 \end{cases}$$

$$(fog)(x) = f(x) \Rightarrow (2x + 1)^2 = (2x - 3)^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{(2x + 1)^2} = \sqrt{(2x - 3)^2} \Rightarrow |2x + 1| = |2x - 3|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 2x - 3 \rightarrow 1 = -3 \text{ غیر ممکن} \\ 2x + 1 = -(2x - 3) \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = ax - 1$ و $g(x) = 1 - 2x$ آن گاه به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع f و fog

روی محور x ها متقاطع اند؟

$$\begin{matrix} (1) & -2 & (2) & 2 & (3) & 3 & (4) & -3 \end{matrix}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(1 - 2x) = a(1 - 2x) - 1 = -2ax + a - 1$$

چون نمودارهای دو تابع روی محور x ها (یعنی نقطه ای به عرض صفر) یکدیگر را قطع می کنند پس دو تابع ریشه ی مشترک دارند ریشه های دو تابع را بدست می آوریم و مساوی هم قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} ax - 1 = 0 &\rightarrow x = \frac{1}{a} \\ 2ax + a - 1 = 0 &\rightarrow x = \frac{1 - a}{2a} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1 - a}{2a} \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{4}(x - 3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی $f \circ g$ که زیر محور x ها

قرار دارد برابر کدام بازه است؟ جواب (۵، -۱) (سراسری تجربی ۹۱خارج)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{1}{4}(x - 3)\right) = \left(\frac{1}{4}(x - 3)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}(x - 3)\right) - 2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 9) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} - 2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \xrightarrow{\text{جواب}} (-1, 5)$$

x	-1	5
$x^2 - 4x - 5$	+	+
	o	o
	-	+
	جواب	

تمرین: اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای

محور x ها قرار دارد برابر کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

(۱) (-۴, ۱) (۲) (-۳, ۲) (۳) (-۲, ۱) (۴) (۴, -۱)

مثال: اگر $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x}$ ضابطه $f(x)$ کدام است؟

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2x}{x-1} \quad \text{معادله تابعی}$$

$$\frac{x+1}{x} = t \Rightarrow x+1 = tx \Rightarrow x - tx = -1 \Rightarrow x(1-t) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{1-t} = \frac{1}{t-1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2\left(\frac{1}{t-1}\right)}{\frac{1}{t-1} - 1} = \frac{\frac{2}{t-1}}{\frac{t-1}{t-1} - 1} = \frac{2}{2-t} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2-x}$$

مثال: اگر $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشد مقدار عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $f(5) =$

ب) $f(2-x) =$

ج) $f(\sqrt{5}) =$

د) $(g \circ f)(x) =$

$$\xrightarrow{\text{حل}} f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$x - \frac{1}{x} = t \xrightarrow{(\quad)^2} x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 2$$

الف) $f(5) = 5^2 - 2 = 25 - 2 = 23$

ب) $f(2-x) = (2-x)^2 - 2 = 4 - 4x + x^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$

ج) $f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 2 = 5 - 2 = 3$

د) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2) = x^2 - 2 - \frac{1}{x^2 - 2}$

مثال: اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ ضابطه ی $f \circ g$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

$$g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2}$$

$$\Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$

$$= 8\left(\frac{t^2 - 6t + 9}{4}\right) + 11t - 33 + 20$$

$$= 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20$$

$$= 2t^2 - t + 5$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - x + 5) = 2(x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

مثال: اگر $f(x) = \log_x x$ و $(g \circ f)(x) = x + 2$ آن گاه ضابطه ی $g(x)$ کدام است؟

$$2^x - 2 \quad (4)$$

$$2^x + 2 \quad (3)$$

$$2^x + 1 \quad (2)$$

$$2^x - 1 \quad (1)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_x x) = x + 2$$

$$\log_x x = t \xrightarrow{\text{حذف لگاریتم}} 2^t = x \Rightarrow g(t) = 2^t + 1$$

تمرین: اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند تابع $f(x)$ کدام است؟ (سراسری فیزیک ۹۳)

$$x^2 - 2x + 3 \quad (۴) \quad x^2 - 2x + 5 \quad (۳) \quad x^2 - 4x + 5 \quad (۲) \quad x^2 - 4x + 3 \quad (۱)$$

مثال: اگر $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x-1}$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد:

الف) ضابطه‌ی $g(x)$ را بدست آورید. ب) $(g \circ f)(1)$ را بدست آورید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x) + 1}{g(x) - 2} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{g+1}{g-2} = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow (x-1)(g+1) = 2x(g-2)$$

$$\Rightarrow xg + x - g - 1 = 2xg - 4x$$

$$xg - g - 2xg = -x + 1 - 4x$$

$$(x-1-2x)g = -5x+1 \Rightarrow g = \frac{-5x+1}{-x-1} \Rightarrow g = \frac{5x-1}{x+1}$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-2) = \frac{5(-2)-1}{-2+1} = 11$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 6x + 8$ آن گاه کدام گزینه می‌تواند ضابطه‌ی $g(x)$ باشد؟

$$-x-4 \quad (۴) \quad -x-1 \quad (۳) \quad x-2 \quad (۲) \quad x-1 \quad (۱)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) = x^2 + 6x + 8$$

$$\Rightarrow g^2 + 2g = x^2 + 6x + 8$$

$$\text{مربع کامل: } g^2 + 2g + 1 = x^2 + 6x + 8 + 1$$

$$(g+1)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow |g+1| = |x+3|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g+1 = +(x+3) \rightarrow g = x+2 \\ g+1 = -(x+3) \rightarrow g = -x-4 \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ آن گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(سراسری تجربی ۹۰ خ)

$$x^2 + 2x \quad (۴) \quad x^2 - 2x \quad (۳) \quad x^2 + 1 \quad (۲) \quad x^2 - 1 \quad (۱)$$

$$f(g(x)) = g^r(x) - g(x) - 2 = x^r +$$

$$\Rightarrow g^r - g - 2 = x^r + x - 2$$

$$g^r - g = x^r + x$$

$$\text{مربع کامل} \Rightarrow g^r - g + \frac{1}{4} = x^r + x + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(g - \frac{1}{2}\right)^r = \left(x + \frac{1}{2}\right)^r$$

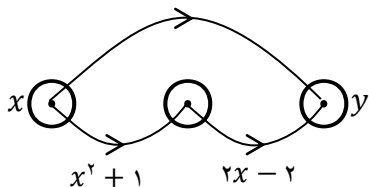
$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} \left|g - \frac{1}{2}\right| = \left|x + \frac{1}{2}\right| \Rightarrow \begin{cases} g - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \rightarrow g = x + 1 \\ g - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \rightarrow g = -x \end{cases}$$

$$f + g = \begin{cases} (x^r - x - 2) + x + 1 = x^r - 1 \\ (x^r - x - 2) + (-x) = x^r - 2x - 2 \end{cases}$$

مفهوم ترکیب در مدل سازی ریاضی :

$$x \xrightarrow[\text{ورودی}]{\boxed{f}} \xrightarrow{\boxed{g}} y \Rightarrow y = (g \circ f)(x)$$

خروجی



مثال : در شکل مقابل عملکرد یک ماشین نشان داده شده است.

خروجی y بر حسب ورودی x کدام است؟

(۱) $y = 2x^2 + 2$ (۲) $y = 2x^2$

(۳) $y = x^2 + 2$ (۴) $y = x^2 - 2$

تابع مورد نظر بیانگر تابعی به فرم $(f \circ g)(x)$ است که $g(x) = x^2 + 1$ و $f(x) = 2x - 2$

$$y = (f \circ g)(x)$$

مثال : در شکل مقابل عملکرد یک ماشین نشان داده شده است اگر $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ، آن گاه مقدار $g(3)$ کدام

است؟

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2}$$

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۱۱

حل) ماشین مورد نظر عملکرد یک تابع از نوع $g \circ f$ را نشان می دهد با توجه به شکل $(g \circ f)(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

بنابراین:

$$g(f(x)) = g\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x - \frac{1}{x} = t \xrightarrow{(\quad)^2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$\Rightarrow g(t) = t^2 + 2 \rightarrow g(3) = 3^2 + 2 = 11$$

مثال: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ مقدار

$f(5)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خ)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$(g \circ f)(x) = 2x$$

$$g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x - 4}{3}$$

$$\Rightarrow f(5) = \frac{2(5) - 4}{3} = 2$$

مثال ۱۵۴: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد ورودی آن کدام است؟

ورودی $\rightarrow [2x - 2] \rightarrow \left[\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right] \rightarrow$ خروجی

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

$$x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow y \Rightarrow y = (g \circ f)(x)$$

$$f(x) = 2x - 2 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow y = g(f(x)) = g(2x - 2) = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2 + 1}} = \frac{4}{3}$$

روش اول: جایگذاری گزینه‌ها

روش دوم:

$$\Rightarrow 2x - 2 = -t \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{t+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3t = 4\sqrt{t+1}$$

$$\Rightarrow 3t - 4\sqrt{t+1} - 4 = 0$$

$$\sqrt{t+1} = u \Rightarrow 3u^2 - 4u - 4 = 0 \Rightarrow (3u - 6)(u + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ u = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$u = 2 \Rightarrow \sqrt{t+1} = 2 \rightarrow t = 4 \Rightarrow 2x - 2 = t \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow [x = 3]$$

$$u = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{t+1} = -\frac{2}{3} \quad \times$$